BANJARESE PACIFIC INDONESIA

Journal Of International Multidisciplinary Research

Existence and Uniqueness of Fixed Points In Complex Value Metric Space

Nurul Huda[1*], Siti Nafisah[2]
Universitas Lambung Mangkurat[12], Banjarbaru, Indonesia
hoeda@ulm.ac.id[1*], snafisah05@gmail.com[2]

Informasi Artikel

E-ISSN : 3026-6874
Vol: 1, No. : 2, Desember 2023
Halaman :973-980

Keywords:
Metric Space
Coupled Fixed Point
Unique

Abstract

A set that equipped with a metric called metric space and written by (X,d). Introduced a newer concept of metric space, that is complex valued metric space. Complex valued metric space is a generalization of the classical metric space. Also discussed about fixed point theorem on complex valued metric space. Fixed point is a point that map to the point it self. Then, the fixed point extend to a coupled fixed point. Coupled fixed point is a pair of point that are mapped to each pair of point element. The purpose of this research is to prove the existance and uniqueness of couple fixed point result in complex valued metric space. This research is conducted by construct a sequence of contractive F mapping in complex valued metric space. Next, prove that the sequence is a Cauchy sequence and convergent to coupled fixed point in F. Then, prove that F has a unique coupled fixed point. The result that obtained from this research is the mapping F in complex valued metric space that satisfies one of three inequalities with two coefficients and their sum less than one have a unique coupled fixed point.

Abstrak

Himpunan yang dilengkapi dengan suatu metrik disebut ruang metrik dan dituliskan dengan (X,d). memperkenalkan konsep ruang metrik yang lebih baru, yaitu ruang metrik bernilai kompleks. Ruang metrik bernilai kompleks merupakan perumuman dari ruang metrik klasik. Selain itu, juga membahas tentang teorema titik tetap pada ruang metrik bernilai kompleks. Titik tetap merupakan suatu titik yang dipetakan ke dirinya sendiri. Kemudian, titik tetap mengalami perluasan menjadi titik tetap berpasangan. Titik tetap berpasangan adalah sepasang titik yang dipetakan ke masing-masing elemen pasangan titik tersebut. Tujuan dari penelitian ini adalah membuktikan eksistensi dan ketunggalan titik tetap berpasangan pada ruang metrik bernilai kompleks. Penelitian dilakukan dengan membentuk barisan dari pemetaan *F* yang kontraktif di ruang metrik bernilai kompleks. Selanjutnya, membuktikan bahwa barisan tersebut adalah barisan Cauchy dan konvergen ke titik tetap berpasangan di *F*. Kemudian membuktikan bahwa *F* memiliki titik tetap berpasangan yang tunggal. Hasil yang diperoleh dari penelitian ini adalah pemetaan *F* pada ruang metrik bernilai kompleks yang memenuhi salah satu dari tiga ketaksamaan dengan dua koefisien yang jumlahannya kurang dari satu memiliki titik tetap berpasangan yang tunggal.

Kata Kunci : Ruang Metrik, titik Tetap Berpasangan, Ketunggalan

PENDAHULUAN

Pasangan himpunan yang dilengkapi dengan suatu metrik disebut ruang metrik. Kemudian, ruang metrik mengalami perkembangan. Diantaranya ruang metrik parsial, ruang *Banach* dan ruang metrik *cone*. Pada tahun berikutnya, Azzam, dkk (2011) memperkenalkan ruang metrik bernilai kompleks. Ruang metrik bernilai kompleks merupakan perumuman dari ruang metrik biasa. Pada ruang metrik biasa, metrik yang digunakan bernilai riil, sedangkan pada ruang metrik bernilai kompleks, metrik yang digunakan bernilai kompleks. Dengan menggunakan urutan parsial pada bilangan kompleks, metrik bernilai kompleks memiliki sifat-sifat yang mirip dengan metrik bernilai riil. Selanjutnya, pada penelitian yang dilakukan Azzam, dkk (2011) juga membahas tentang titik tetap yang ada pada ruang metrik bernilai kompleks. Titik tetap merupakan suatu titik yang dipetakan ke dirinya sendiri. Selanjutnya, Sabetghadam, dkk (2009) meneliti tentang beberapa teorema titik tetap berpasangan pada ruang metrik *cone*. Dalam penelitian tersebut dijelaskan bahwa titik tetap berpasangan merupakan sepasang titik yang dipetakan ke masing-masing elemen pasangan titik tersebut. Berdasarkan penjelasan di atas maka penulis tertarik untuk membahas dan meneliti teorema titik tetap berpasangan untuk pemetaan di ruang metrik bernilai kompleks dalam bentuk skripsi.

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Ruang Metrik

Himpunan yang dipasangkan dengan suatu metrik disebut ruang metrik. Berikut diberikan definisi ruang metrik sebagai salah satu konsep dasar ruang metrik bernilai kompleks.

Definisi 2.1.1 [2]

Ruang metrik adalah suatu pasangan $(\mathcal{X}, \mathcal{d})$, dengan $\mathcal{X}$ adalah suatu himpunan tak kosong dan d adalah suatu metrik pada $\mathcal{X}$ (fungsi jarak pada $\mathcal{X}$) yaitu fungsi yang di definisikan pada $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ sedemikian sehingga berlaku :

(1) $\mathcal{d}(\rho, \gamma) \geq 0\,, \forall\, \rho, \gamma \in \mathcal{X}$

(2) $\mathcal{d}(\rho, \gamma) = 0 \Leftrightarrow \rho = \gamma$

(3) $\mathcal{d}(\rho, \gamma) = \mathcal{d}(\gamma, \rho)$ *(simetri)*

(4) $\mathcal{d}(\rho, \gamma) \leq \mathcal{d}(\rho, \eta) + \mathcal{d}(\eta, \gamma), \forall\, \rho, \gamma, \eta \in \mathcal{X}$ *(ketaksamaan segitiga)*

Suatu ruang metrik yang memiliki barisan berkaitan erat dengan kekonvergenan. Definisi barisan yang konvergen pada ruang metrik dinyatakan sebagai berikut:

Definisi 2.1.2 [2]

Diberikan $(\mathcal{X}, \mathcal{d})$ suatu ruang metrik. Jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n > N$ berlaku $\mathcal{d}(\rho_n, \rho) < \varepsilon$, maka barisan $\{\rho_n\}$ di $(\mathcal{X}, \mathcal{d})$ disebut barisan yang konvergen.

Selain kekonvergenan suatu barisan, ruang metrik juga erat kaitannya dengan barisan Cauchy. Definisi barisan Cauchy pada ruang metrik adalah sebagai berikut:

Definisi 2.1.3 [2]

Diberikan $(\mathcal{X}, \mathcal{d})$ suatu ruang metrik. Jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $m, n > N$ berlaku $\mathcal{d}(\rho_m, \rho_n) < \varepsilon$, maka barisan $\{\rho_n\}$ di $(\mathcal{X}, \mathcal{d})$ disebut barisan Cauchy.

Selanjutnya, akan diberikan definisi tentang pemetaan kontraktif pada suatu ruang metrik, yaitu

Definisi 2.1.4 [2]

Diberikan suatu ruang metrik $\mathcal{X} = (\mathcal{X}, \mathcal{d})$. Pemetaan $T: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ dikatakan kontraktif di $\mathcal{X}$ jika ada bilangan riil positif $\alpha < 1$, sehingga untuk semua $\rho, \gamma \in \mathcal{X}$ berlaku

$$\mathcal{d}(T\rho, T\gamma) \leq \alpha \mathcal{d}(\rho, \gamma)$$

2.2 Ruang Metrik Bernilai Kompleks

Diberikan $\mathbb{C}$ adalah himpunan bilangan kompleks dan η_1,$\eta_2 \in \mathbb{C}$, didefinisikan urutan parsial $\precsim$ pada $\mathbb{C}$ sebagai berikut:

Definisi 2.2.1 [4]

Misalkan $\mathbb{C}$ adalah himpunan bilangan kompleks dan $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{C}$. $\eta_1 \precsim \eta_2$ jika dan hanya jika $Re\left(\eta_1\right) \leq Re\left(\eta_2\right)$ dan $Im\left(\eta_1\right) \leq Im\left(\eta_2\right)$, yaitu jika salah satu dari kondisi berikut terpenuhi :

(i) $Re\left(\eta_1\right) = Re\left(\eta_2\right)$ *dan* $Im\left(\eta_1\right) = Im\left(\eta_2\right)$

(ii) $Re\left(\eta_1\right) < Re\left(\eta_2\right)$ *dan* $Im\left(\eta_1\right) = Im\left(\eta_2\right)$

(iii) $Re\left(\eta_1\right) = Re\left(\eta_2\right)$ *dan* $Im\left(\eta_1\right) < Im\left(\eta_2\right)$

(iv) $Re\left(\eta_1\right) < Re\left(\eta_2\right)$ *dan* $Im\left(\eta_1\right) < Im\left(\eta_2\right)$

Jika $\eta_1 \neq \eta_2$ dan salah satu dari *(ii)*, *(iii)*, atau *(iv)* terpenuhi maka bisa dituliskan $\eta_1 \precnsim \eta_2$. Dan jika hanya *(iv)* yang terpenuhi maka bisa dituliskan $\eta_1 \prec \eta_2$.

Lemma 2.2.2 [4]

Urutan parsial pada bilangan kompleks mempunyai sifat:

(i) *Jika $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $a \leq b$, maka $a\eta \prec b\eta$ untuk semua $\eta \in \mathbb{C}$*

(ii) *Jika* $0 \precsim \eta_1 \precnsim \eta_2$, *maka* $\left|\eta_1\right| < \left|\eta_2\right|$

(iii) *Jika* $\eta_1 \precsim \eta_2$ *dan* $\eta_2 \prec \eta_3$, *maka* $\eta_1 \prec \eta_3$

Definisi 2.2.3 [4]

Diberikan $\mathcal{X}$ *merupakan himpunan tak kosong. Misalkan bahwa pemetaan* $d: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{C}$ *memenuhi:*

(i) $0 \precsim d(\rho,\gamma), \forall \rho,\gamma \in \mathcal{X}$ *dan* $d(\rho,\gamma)=0 \Leftrightarrow \rho = \gamma$;

(ii) $d(\rho,\gamma)= d(\gamma,\rho), \forall \rho,\gamma \in \mathcal{X}$;

(iii) $d(\rho,\gamma) \precsim d(\rho,z)+ d(z,\gamma), \forall \rho,\gamma,\eta \in \mathcal{X}$;

maka d *disebut metrik bernilai kompleks pada* $\mathcal{X}$ *dan* $(\mathcal{X}, d)$ *disebut ruang metrik bernilai kompleks.*

Definisi 2.2.4 [4]

Diberikan $(\mathcal{X}, d)$ *adalah ruang metrik bernilai kompleks dan* $\{\rho_n\}$ *adalah barisan dalam* $\mathcal{X}$. *Didefinisikan*

(i) *Jika untuk setiap* $c \in \mathbb{C}$ *dengan* $0 \prec c$, *terdapat* $N \in \mathbb{N}$ *sedemikian sehingga* $d(\rho_n, \rho) \prec c$ *untuk semua* $n \geq N$, *maka* $\{\rho_n\}$ *dikatakan barisan konvergen pada* $\rho \in \mathcal{X}$, *dan dituliskan* $\rho_n \to \rho$ *untuk* $n \to \infty$ *atau* $\lim_{n\to\infty}\rho_n = \rho$.

(ii) *Jika untuk setiap* $c \in \mathbb{C}$ *dengan* $0 \prec c$, *terdapat* $N \in \mathbb{N}$ *sedemikian sehingga* $d(\rho_n, \rho_{n+m}) \prec c$ *untuk semua* $n \geq N$, *dengan* $m \in \mathbb{N}$, *maka* $\{\rho_n\}$ *dikatakan barisan Cauchy.*

(iii) *Jika setiap barisan Cauchy dalam* $\mathcal{X}$ *adalah barisan konvergen, maka* $(\mathcal{X}, d)$ *dikatakan ruang metrik bernilai kompleks yang lengkap.*

Lemma 2.2.5 [4]

Diberikan $(\mathcal{X}, d)$ *adalah ruang metrik bernilai kompleks dan* $\{\rho_n\}$ *adalah barisan pada* $\mathcal{X}$. *Barisan* $\{\rho_n\}$ *adalah barisan Cauchy pada* $\mathcal{X}$ *jika hanya jika* $|d(\rho_n, \rho_{n+m})| \to 0$ *untuk* $n \to \infty$.

2.3 Titik Tetap

Titik tetap merupakan titik yang memetakan ke dirinya sendiri. Berikut ini diberikan definisi dari titik tetap yaitu:

Definisi 2.3.1 [2]

Titik tetap dari pemetaan $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ *untuk setiap* $\rho \in \mathcal{X}$ *dikatakan titik tetap dari* T *jika hanya jika* $T\rho = \rho$.

2.4 Titik Tetap Berpasangan

Pada bagian ini akan diberikan definisi dari titik tetap berpasangan yang dinyatakan sebagai berikut:

Definisi 2.5.1 [4]

Elemen $(\rho,\gamma) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ *disebut titik tetap berpasangan dari pemetaan* $F: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ *jika* $F(\rho,\gamma) = \rho$ *dan* $F(\gamma,\rho) = \gamma$.

METODE

Metode penelitian ini dilakukan dengan cara studi literatur. Adapun prosedur penelitian ini adalah dengan membentuk barisan dari pemetaan F yang kontraktif di ruang metrik bernilai kompleks. Selanjutnya, membuktikan bahwa barisan tersebut adalah barisan Cauchy dan konvergen ke titik tetap berpasangan di F. Kemudian membuktikan bahwa F memiliki titik tetap berpasangan yang tunggal.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Teorema 4.1

Diberikan $(\mathcal{X}, d)$ *adalah ruang metrik lengkap bernilai kompleks. Misalkan pemetaan* $F: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ *memenuhi*

$$d\big(F(\rho,\gamma), F(\mu,\upsilon)\big) \precsim h d(\rho,\mu) + k d(\gamma,\upsilon) \qquad \text{... (4.1)}$$

untuk semua $\rho,\gamma,\mu,\upsilon \in \mathcal{X}$, *dengan* h *dan* k *adalah konstanta non-negatif dengan* $h + k < 1$, *maka* F *mempunyai titik tetap berpasangan yang tunggal.*

Bukti:
Langkah pertama adalah membentuk barisan $\{\rho_n\}$ dan $\{\gamma_n\}$. Akan dipilih $\rho_0, \gamma_0 \in \mathcal{X}$ dan didefinisikan barisan $\{\rho_n\}$ dan $\{\gamma_n\}$ sebagai berikut

$$\rho_n = F\left(\rho_{n-1}, \gamma_{n-1}\right), \qquad \gamma_n = F\left(\gamma_{n-1}, \rho_{n-1}\right), \qquad \text{... (4.2)}$$

$$\rho_{n+1} = F(\rho_n, \gamma_n), \qquad \gamma_{n+1} = F(\gamma_n, \rho_n). \qquad \text{... (4.3)}$$

Dengan mensubstitusi Persamaan (4.2) dan (4.3) ke Persamaan (4.1) diperoleh

$$d(\rho_n, \rho_{n+1}) \precsim hd(\rho_{n-1}, \rho_n) + kd(\gamma_{n-1}, \gamma_n) \qquad \text{... (4.4)}$$

dan

$$d\left(\gamma_n, \gamma_{n+1}\right) \precsim hd\left(\gamma_{n-1}, \gamma_n\right) + kd\left(\rho_{n-1}, \rho_n\right) \qquad \text{... (4.5)}$$

Oleh karena itu, misalkan $d_n = d\left(\rho_n, \rho_{n+1}\right) + d\left(\gamma_n, \gamma_{n+1}\right)$, maka berdasarkan Persamaan (4.4) dan (4.5) diperoleh $d_n \precsim (h+k)d_{n-1}$. Misalkan $p = h + k < 1$, maka $d_n \precsim pd_{n-1}$, sehingga untuk $n = 0, 1, 2, \ldots$ dapat dituliskan sebagai berikut

$$d_n \precsim pd_{n-1} \precsim p^2 d_{n-2} \precsim \cdots \precsim p^n d_0. \qquad \text{... (4.6)}$$

Selanjutnya, untuk semua $m > n$, diperoleh

$$d(\rho_m, \rho_n) \precsim d\left(\rho_n, \rho_{n+1}\right) + d\left(\rho_{n+1}, \rho_{n+2}\right) + \cdots + d\left(\rho_{m-1}, \rho_m\right) \qquad \text{... (4.7)}$$

dan

$$d(\gamma_m, \gamma_n) \precsim d\left(\gamma_n, \gamma_{n+1}\right) + d\left(\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}\right) + \cdots + d\left(\gamma_{m-1}, \gamma_m\right) \qquad \text{... (4.8)}$$

Jadi berdasarkan Persamaan (4.7), (4.8) dan (4.9) diperoleh

$$d(\rho_m, \rho_n) + d(\gamma_m, \gamma_n) \precsim p^n d_0 + p^{n+1} d_0 + \cdots + p^{m-1} d_0 \qquad \text{... (4.9)}$$

Menurut ketaksamaan segitiga pada bilangan kompleks, Persamaan (4.9) bisa diubah menjadi

$$|d(\rho_m, \rho_n) + d(\gamma_m, \gamma_n)| \leq \left|p^n d_0 + p^{n+1} d_0 + \cdots + p^{m-1} d_0\right|$$

$$|d(\rho_m, \rho_n) + d(\gamma_m, \gamma_n)| \leq \frac{p^n}{1-p}|d_0|. \qquad \text{... (4.10)}$$

Karena $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p^n}{1-p} = 0$ dan d_0 merupakan suatu bilangan, maka $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p^n}{1-p}\left|d_0\right| = 0$. Menurut Definisi 2.2.3 (i), diketahui bahwa $d(\rho_m, \rho_n) + d(\gamma_m, \gamma_n) \succsim 0$ sehingga Persamaan (4.10) menjadi $0 \precsim |d(\rho_m, \rho_n) + d(\gamma_m, \gamma_n)| \precsim \frac{p^n}{1-p}\left|d_0\right|$. Akibatnya, dari Lemma 2.2.5 diperoleh $\{\rho_n\}$ dan $\{\gamma_n\}$ adalah barisan Cauchy di $\mathcal{X}$. Karena diketahui bahwa $(\mathcal{X}, d)$ adalah ruang metrik lengkap bernilai kompleks, maka berdasarkan Definisi 2.2.4 (iii) barisan $\{\rho_n\}$ dan $\{\gamma_n\}$ adalah barisan yang konvergen di $\mathcal{X}$ sehingga menurut Definisi 2.2.4 (i) terdapat $\rho^*, \gamma^* \in \mathcal{X}$ sedemikian hingga $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = \rho^*$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma^*$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa (ρ^*, γ^*) adalah titik tetap berpasangan dari F. Diberikan $c \in \mathbb{C}$ dengan $0 \prec c$. Untuk sebarang $m \in \mathbb{N}$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $d(\rho_n, \rho^*) \prec \frac{c}{2m}$ dan $d(\gamma_n, \gamma^*) \prec \frac{c}{2m}$ untuk semua $n \geq N$.

Menurut ketaksamaan segitiga dan Persamaan (4.3) dan (4.4), maka diperoleh

$$\begin{aligned} d(F(\rho^*, \gamma^*), \rho^*) &\precsim d\left(F(\rho^*, \gamma^*), \rho_{N+1}\right) + d\left(\rho_{N+1}, \rho^*\right) \\ &= d\big(F(\rho^*, \gamma^*), F(\rho_N, \gamma_N)\big) + d\left(\rho_{N+1}, \rho^*\right) \\ &\precsim hd(\rho_N, \rho^*) + kd(\gamma_N, \gamma^*) + d(\rho_{N+1}, \rho^*) \\ &\prec \frac{c}{m}. \end{aligned}$$

Jadi menurut Lemma 2.2.2 (ii), maka diperoleh $|d(F(\rho^*, \gamma^*), \rho^*)| < \frac{c}{m}$ untuk semua $m \geq 1$. Karena m sebarang, maka diperoleh $d(F(\rho^*, \gamma^*), \rho^*) = 0$ sehingga dari Definisi 2.2.3 (i) didapatkan

$$F(\rho^*, \gamma^*) = \rho^*. \qquad \text{... (4.11)}$$

Selanjutnya dengan cara yang serupa, diperoleh

$$F(\gamma^*, \rho^*) = \gamma^*. \qquad \text{... (4.12)}$$

Berdasarkan Definisi 2.4.1 maka Persamaan (4.11) dan (4.12) menunjukkan bahwa (ρ^*, γ^*) adalah titik tetap berpasangan dari F.

Langkah berikutnya adalah membuktikan ketunggalan titik tetap berpasangan. Andaikan $\left(\rho', \gamma'\right)$ adalah titik tetap berpasangan yang lain di F, maka berdasarkan Persamaan (4.11), Persamaan (4.12) dan Persamaan (4.1) didapatkan

$$d(\rho', \rho^*) = d\big(F(\rho', \gamma'), F(\rho^*, \gamma^*)\big) \precsim hd(\rho', \rho^*) + kd(\gamma', \gamma^*) \quad \text{...(4.13)}$$

dan

$$d\left(\gamma', \gamma^*\right) = d\left(F\left(\gamma', \rho'\right), F(\gamma^*, \rho^*)\right) \precsim hd\left(\gamma', \gamma^*\right) + kd\left(\rho', \rho^*\right) \quad \text{... (4.14)}$$

sehingga dari Persamaan (4.13) dan (4.14) diperoleh

$$d\left(\rho', \rho^*\right) + d\left(\gamma', \gamma^*\right) \precsim (h+k)\left(d\left(\rho', \rho^*\right) + d\left(\gamma', \gamma^*\right)\right)$$

$$\big(1-(h+k)\big)\left(d\left(\rho', \rho^*\right) + d\left(\gamma', \gamma^*\right)\right) \precsim 0 \quad \text{... (4.15)}$$

Berdasarkan Lemma 2.2.2 (ii), didapatkan

$$\left|\big(1-(h+k)\big)\left(d\left(\rho', \rho^*\right) + d\left(\gamma', \gamma^*\right)\right)\right| \leq 0$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa

$$\big(1-(h+k)\big)\left(d\left(\rho', \rho^*\right) + d\left(\gamma', \gamma^*\right)\right) = 0$$

Karena diketahui $h+k<1$, maka $1-(h+k) \neq 0$ sehingga diperoleh $d\left(\rho', \rho^*\right) + d\left(\gamma', \gamma^*\right) = 0$, sehingga $d\left(\rho', \rho^*\right) = 0$ dan $d\left(\gamma', \gamma^*\right) = 0$. Berdasarkan Definisi 2.2.3 (i) maka didapatkan $\rho' = \rho^*$ dan $\gamma' = \gamma^*$. Dari penjelasan di atas dapat disimpulkan bahwa pengandaian salah, yang benar adalah $\left(\rho', \gamma'\right) = (\rho^*, \gamma^*)$ sehingga F memiliki titik tetap berpasangan yang tunggal. ■

Teorema 4.2

Diberikan $(\mathcal{X}, d)$ adalah ruang metrik lengkap bernilai kompleks. Misalkan pemetaan $F: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ memenuhi

$$d\big(F(\rho,\gamma), F(\mu, \upsilon)\big) \precsim hd(F(\rho,\gamma),\rho) + kd(F(\mu,\upsilon),\mu) \quad \text{... (4.16)}$$

untuk semua $\rho, \gamma, \mu, \upsilon \in \mathcal{X}$, dengan h dan k adalah konstanta non-negatif dengan $h+k<1$, maka F mempunyai titik tetap berpasangan yang tunggal.

Bukti:

Langkah pertama adalah membentuk barisan $\{\rho_n\}$ dan $\{\gamma_n\}$. Akan dipilih $\rho_0, \gamma_0 \in \mathcal{X}$ dan didefinisikan barisan $\{\rho_n\}$ dan $\{\gamma_n\}$ sebagai berikut

$$\rho_n = F(\rho_{n-1}, \gamma_{n-1}), \qquad \gamma_n = F(\gamma_{n-1}, \rho_{n-1}), \quad \text{... (4.17)}$$

$$\rho_{n+1} = F(\rho_n, \gamma_n), \qquad \gamma_{n+1} = F(\gamma_n, \rho_n) \quad \text{... (4.18)}$$

Dengan mensubstitusi Persamaan (4.17) dan (4.18) ke Persamaan (4.16) diperoleh

$$\begin{aligned} d(\rho_n, \rho_{n+1}) &\precsim hd(F(\rho_{n-1}, \gamma_{n-1}), \rho_{n-1}) + kd(F(\rho_n, \gamma_n), \rho_n) \\ &= hd(\rho_n, \rho_{n-1}) + kd(\rho_{n+1}, \rho_n) \quad \text{... (4.19)} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} d\left(\gamma_n, \gamma_{n+1}\right) &\precsim hd\left(F\left(\gamma_{n-1}, \rho_{n-1}\right), \gamma_{n-1}\right) + kd(F(\gamma_n, \rho_n), \gamma_n) \\ &= hd(\gamma_n, \gamma_{n-1}) + kd(\gamma_{n+1}, \gamma_n). \quad \text{... (4.20)} \end{aligned}$$

Sehingga dari Persamaan (4.19) didapatkan

$$d\left(\rho_n, \rho_{n+1}\right) \precsim hd\left(\rho_n, \rho_{n-1}\right) + kd\left(\rho_{n+1}, \rho_n\right) \precsim \frac{h}{1-k} d\left(\rho_{n-1}, \rho_n\right) \quad \text{... (4.21)}$$

dan dari Persamaan (4.20) didapatkan

$$d\left(\gamma_n, \gamma_{n+1}\right) \precsim hd\left(\gamma_n, \gamma_{n-1}\right) + kd\left(\gamma_{n+1}, \gamma_n\right) \precsim \frac{h}{1-k} d\left(\gamma_{n-1}, \gamma_n\right) \quad \text{... (4.22)}$$

Misalkan $d_n = d\left(\rho_n, \rho_{n+1}\right) + d\left(\gamma_n, \gamma_{n+1}\right)$, berdasarkan Persamaan (4.21) dan (4.22) diperoleh $d_n \precsim \left(\frac{h}{1-k}\right) d_{n-1}$. Misalkan $p = \frac{h}{1-k} < 1$, maka $d_n \precsim pd_{n-1}$, sehingga, untuk $n = 0, 1, 2, \ldots$ dapat dituliskan sebagai berikut

$$d_n \precsim pd_{n-1} \precsim p^2 d_{n-2} \precsim \cdots \precsim p^n d_0. \quad \text{... (4.23)}$$

Selanjutnya, untuk semua $m > n$, diperoleh

$$d(\rho_m, \rho_n) \precsim d\left(\rho_n, \rho_{n+1}\right) + d\left(\rho_{n+1}, \rho_{n+2}\right) + \cdots + d\left(\rho_{m-1}, \rho_m\right) \quad \text{... (4.24)}$$

dan

$$d(\gamma_m, \gamma_n) \precsim d\left(\gamma_n, \gamma_{n+1}\right) + d\left(\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}\right) + \cdots + d\left(\gamma_{m-1}, \gamma_m\right) \quad \text{... (4.25)}$$

Jadi berdasarkan Persamaan (4.23), (4.24) dan (4.25) diperoleh

$$d(\rho_m, \rho_n) + d(\gamma_m, \gamma_n) \precsim p^n d_0 + p^{n+1} d_0 + \cdots + p^{m-1} d_0 \quad \text{... (4.26)}$$

Menurut ketaksamaan segitiga pada bilangan kompleks, Persamaan (4.26) bisa diubah menjadi

$$|d(\rho_m, \rho_n) + d(\gamma_m, \gamma_n)| \leq \left|p^n d_0 + p^{n+1} d_0 + \cdots + p^{m-1} d_0\right|$$

$$|d(\rho_m, \rho_n) + d(\gamma_m, \gamma_n)| \leq \frac{p^n}{1-p}\left|d_0\right|$$

Karena $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p^n}{1-p} = 0$ dan d_0 merupakan suatu bilangan, maka $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p^n}{1-p}\left|d_0\right| = 0$. Menurut Definisi 2.2.3 (i), diketahui bahwa $d(\rho_m, \rho_n) + d(\gamma_m, \gamma_n) \succsim 0$ sehingga Persamaan (4.27) menjadi $0 \precsim |d(\rho_m, \rho_n) + d(\gamma_m, \gamma_n)| \precsim \frac{p^n}{1-p}\left|d_0\right|$. Akibatnya, dari Lemma 2.2.5 diperoleh $\{\rho_n\}$ dan $\{\gamma_n\}$ adalah barisan Cauchy di $\mathcal{X}$. Karena diketahui bahwa $(\mathcal{X}, d)$ adalah ruang metrik lengkap bernilai kompleks, maka berdasarkan Definisi 2.2.4 (iii) barisan $\{\rho_n\}$ dan $\{\gamma_n\}$ adalah barisan yang konvergen di $\mathcal{X}$, sehingga menurut Definisi 2.2.4 (i) terdapat $\rho^*, \gamma^* \in \mathcal{X}$ sedemikian hingga $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = \rho^*$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma^*$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa (ρ^*, γ^*) adalah titik tetap berpasangan dari F. Diberikan $c \in \mathbb{C}$ dengan $0 \prec c$. Untuk sebarang $m \in \mathbb{N}$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $d(\rho_n, \rho^*) \prec \frac{1-k}{3m} c$ dan $d(\gamma_n, \gamma^*) \prec \frac{1-k}{3m} c$ untuk semua $n \geq N$.

Menurut ketaksamaan segitiga, Persamaan (4.16) dan Persamaan (4.18) diperoleh

$$\begin{aligned}
d(F(\rho^*, \gamma^*), \rho^*) &\precsim d\big(\rho_{N+1}, F(\rho^*, \gamma^*)\big) + d(\rho_{N+1}, \rho^*) \\
&= d\big(F(\rho_N, \gamma_N), F(\rho^*, \gamma^*)\big) + d(\rho_{N+1}, \rho^*) \\
d(F(\rho^*, \gamma^*), \rho^*) &\precsim hd(F(\rho_N, \gamma_N), \rho_N) + kd(F(\rho^*, \gamma^*), \rho^*) + d(\rho_{N+1}, \rho^*) \\
(1-k)d(F(\rho^*, \gamma^*), \rho^*) &\precsim hd(\rho_{N+1}, \rho_N) + d(\rho_{N+1}, \rho^*) \\
(1-k)d(F(\rho^*, \gamma^*), \rho^*) &\precsim h\big(d(\rho_{N+1}, \rho^*) + d(\rho^*, \rho_N)\big) + d(\rho_{N+1}, \rho^*) \\
&\prec \frac{c}{m}.
\end{aligned}$$

Jadi menurut Lemma 2.2.2 (ii) maka diperoleh $|d(F(\rho^*, \gamma^*), \rho^*)| < \frac{c}{m}$ untuk semua $m \geq 1$. Karena m sebarang, maka diperoleh $d(F(\rho^*, \gamma^*), \rho^*) = 0$ sehingga dari Definisi 2.2.3 (i) didapatkan

$$F(\rho^*, \gamma^*) = \rho^*. \quad \text{... (4.27)}$$

Selanjutnya dengan cara yang serupa, diperoleh

$$F(\gamma^*, \rho^*) = \gamma^*. \quad \text{... (4.28)}$$

Berdasarkan Definisi 2.4.1 maka Persamaan (4.27) dan (4.28) menunjukkan bahwa (ρ^*, γ^*) adalah titik tetap berpasangan dari F.

Langkah berikutnya adalah membuktikan ketunggalan titik tetap berpasangan. Andaikan (ρ', γ') adalah titik tetap berpasangan yang lain di F, maka berdasarkan Persamaan (4.27) dan Persamaan (4.16) didapatkan

$$\begin{aligned}
d(\rho', \rho^*) &= d\big(F(\rho', \gamma'), F(\rho^*, \gamma^*)\big). \\
&\precsim hd(F(\rho', \gamma'), \rho') + kd(F(\rho^*, \gamma^*), \rho^*)
\end{aligned}$$

$$= hd(\rho', \rho') + kd(\rho^*, \rho^*)$$

Berdasarkan Definisi 2.2.3 (i) maka diperoleh $d(\rho', \rho') = 0$ dan $d(\rho^*, \rho^*) = 0$ sehingga $d(\rho', \rho^*) = 0$ dan didapatkan $\rho' = \rho^*$. Dengan cara yang serupa diperoleh $\gamma' = \gamma^*$. Dari penjelasan di atas dapat disimpulkan bahwa pengandaian salah, yang benar adalah $(\rho', \gamma') = (\rho^*, \gamma^*)$ sehingga F memiliki titik tetap berpasangan yang tunggal. ■

Teorema 4.3

Diberikan $(\mathcal{X}, d)$ adalah ruang metrik lengkap bernilai kompleks. Misalkan pemetaan $F: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ memenuhi

$$d\big(F(\rho, \gamma), F(\mu, \upsilon)\big) \precsim hd(F(\rho, \gamma), \mu) + kd(F(\mu, \upsilon), \rho) \quad \text{... (4.29)}$$

untuk semua $\rho, \gamma, \mu, \upsilon \in \mathcal{X}$, dengan h dan k adalah konstanta non-negatif dengan $h + k < 1$ dan $k < \frac{1}{2}$, maka F mempunyai titik tetap berpasangan yang tunggal.

Bukti:

Misalkan $\rho_0, \gamma_0 \in \mathcal{X}$ dan didefinisikan barisan $\{\rho_n\}$ dan $\{\gamma_n\}$ sebagai berikut

$$\rho_n = F(\rho_{n-1}, \gamma_{n-1}), \qquad \gamma_n = F(\gamma_{n-1}, \rho_{n-1}), \quad \text{... (4.30)}$$

$$\rho_{n+1} = F(\rho_n, \gamma_n), \qquad \gamma_{n+1} = F(\gamma_n, \rho_n) \quad \text{... (4.31)}$$

Dengan mensubstitusi Persamaan (4.30) dan (4.31) ke Persamaan (4.29) diperoleh

$$\begin{aligned} d(\rho_n, \rho_{n+1}) &= d\big(F(\rho_{n-1}, \gamma_{n-1}), F(\rho_n, \gamma_n)\big) \\ &\precsim hd(F(\rho_{n-1}, \gamma_{n-1}), \rho_n) + kd(F(\rho_n, \gamma_n), \rho_{n-1}) \\ &\precsim k[d(\rho_{n+1}, \rho_n) + d(\rho_n, \rho_{n-1})] \end{aligned}$$

$$d(\rho_n, \rho_{n+1}) \precsim \frac{k}{(1-k)} d(\rho_n, \rho_{n-1}) \quad \text{... (4.32)}$$

Dengan cara yang serupa diperoleh

$$d\left(\gamma_n, \gamma_{n+1}\right) \precsim \frac{k}{(1-k)} d\left(\gamma_n, \gamma_{n-1}\right) \quad \text{... (4.33)}$$

Oleh karena itu, misalkan $d_n = d\left(\rho_n, \rho_{n+1}\right) + d\left(\gamma_n, \gamma_{n+1}\right)$, berdasarkan Persamaan (4.32) dan (4.33) maka diperoleh $d_n \precsim= \frac{k}{(1-k)} d_{n-1}$. Misalkan $p = \frac{k}{(1-k)}$ dengan $k < \frac{1}{2}$, maka diperoleh $p < 1$ dan bisa dituliskan dengan $d_n \precsim pd_{n-1}$, sehingga untuk $n = 0, 1, 2, \ldots$ dapat dituliskan sebagai berikut

$$d_n \precsim pd_{n-1} \precsim p^2 d_{n-2} \precsim \cdots \precsim p^n d_0 \quad \text{... (4.34)}$$

Selanjutnya, untuk semua $m > n$, diperoleh

$$d(\rho_m, \rho_n) \precsim d\left(\rho_n, \rho_{n+1}\right) + d\left(\rho_{n+1}, \rho_{n+2}\right) + \cdots + d\left(\rho_{m-1}, \rho_m\right) \quad \text{... (4.35)}$$

dan

$$d(\gamma_m, \gamma_n) \precsim d\left(\gamma_n, \gamma_{n+1}\right) + d\left(\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}\right) + \cdots + d\left(\gamma_{m-1}, \gamma_m\right) \quad \text{... (4.36)}$$

Jadi berdasarkan Persamaan (4.34), (4.35) dan (4.36) diperoleh

$$d(\rho_m, \rho_n) + d(\gamma_m, \gamma_n) \precsim p^n d_0 + p^{n+1} d_0 + \cdots + p^{m-1} d_0 \quad \text{... (4.37)}$$

Menurut ketaksamaan segitiga pada bilangan kompleks, Persamaan (4.37) bisa diubah menjadi

$$|d(\rho_m, \rho_n) + d(\gamma_m, \gamma_n)| \leq \left|p^n d_0 + p^{n+1} d_0 + \cdots + p^{m-1} d_0\right|$$

$$|d(\rho_m, \rho_n) + d(\gamma_m, \gamma_n)| \leq \frac{p^n}{1-p} \left|d_0\right|.$$

Karena $\lim_{n\to\infty} \frac{p^n}{1-p} = 0$ dan d_0 merupakan suatu bilangan, maka $\lim_{n\to\infty} \frac{p^n}{1-p} \left|d_0\right| = 0$. Menurut Definisi 2.2.3 (i), diketahui bahwa $d(\rho_m, \rho_n) + d(\gamma_m, \gamma_n) \succsim 0$ sehingga Persamaan (4.41) menjadi $0 \precsim |d(\rho_m, \rho_n) + d(\gamma_m, \gamma_n)| \precsim \frac{p^n}{1-p} \left|d_0\right|$. Akibatnya, dari Lemma 2.2.5 diperoleh $\{\rho_n\}$ dan $\{\gamma_n\}$ adalah barisan Cauchy di $\mathcal{X}$. Karena diketahui bahwa $(\mathcal{X}, d)$ adalah ruang metrik lengkap bernilai kompleks, maka berdasarkan Definisi 2.2.4 (iii) barisan $\{\rho_n\}$ dan $\{\gamma_n\}$ adalah barisan yang konvergen di $\mathcal{X}$, sehingga menurut Definisi 2.2.4 (i) terdapat $\rho^*, \gamma^* \in \mathcal{X}$ sedemikian hingga $\lim_{n\to\infty} \rho_n = \rho^*$ dan $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma^*$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa (ρ^*, γ^*) adalah titik tetap berpasangan dari F. Diberikan $c \in \mathbb{C}$ dengan $0 \prec c$. Untuk sebarang $m \in \mathbb{N}$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $d(\rho_n, \rho^*) \prec \frac{1-k}{2m}c$ dan $d(\gamma_n, \gamma^*) \prec \frac{1-k}{2m}c$ untuk semua $n \geq N$.

Menurut ketaksamaan segitiga dan Persamaan (4.31) diperoleh

$$\begin{aligned} d(F(\rho^*, \gamma^*), \rho^*) &\precsim d\big(\rho_{N+1}, F(\rho^*, \gamma^*)\big) + d(\rho_{N+1}, \rho^*) \\ &= d\big(F(\rho_N, \gamma_N), F(\rho^*, \gamma^*)\big) + d(\rho_{N+1}, \rho^*) \qquad \text{... (4.38)} \end{aligned}$$

Selanjutnya berdasarkan Persamaan (4.29) dan Persamaan (4.31) maka Persamaan (4.38) menjadi

$$\begin{aligned} d(F(\rho^*, \gamma^*), \rho^*) &\precsim hd(F(\rho_N, \gamma_N), \rho^*) + kd(F(\rho^*, \gamma^*), \rho_N) + d(\rho_{N+1}, \rho^*) \\ &= hd(\rho_{N+1}, \rho^*) + kd(F(\rho^*, \gamma^*), \rho_N) + d(\rho_{N+1}, \rho^*) \\ &\precsim (h+1)d(\rho_{N+1}, \rho^*) + kd(F(\rho^*, \gamma^*), \rho_N) \\ &\precsim (h+1)d(\rho_{N+1}, \rho^*) + k\big[d\big(\rho^*, F(\rho^*, \gamma^*)\big) + d(\rho^*, \rho_N)\big] \\ &\prec \frac{c}{m} \end{aligned}$$

Jadi menurut Lemma 2.2.2 (ii) maka diperoleh $|d(F(\rho^*, \gamma^*), \rho^*)| < \frac{c}{m}$ untuk semua $m \geq 1$. Karena m sebarang, maka diperoleh $d(F(\rho^*, \gamma^*), \rho^*) = 0$ sehingga dari Definisi 2.2.3 (i) didapatkan

$$F(\rho^*, \gamma^*) = \rho^*. \qquad \text{... (4.39)}$$

Selanjutnya dengan cara yang serupa, didapatkan

$$F(\gamma^*, \rho^*) = \gamma^*. \qquad \text{... (4.40)}$$

Berdasarkan Definisi 2.4.1 maka Persamaan (4.39) dan (4.40) menunjukkan bahwa (ρ^*, γ^*) adalah titik tetap berpasangan dari F.

Langkah berikutnya adalah membuktikan ketunggalan titik tetap berpasangan. Andaikan (ρ', γ') adalah titik tetap berpasangan yang lain di F, maka berdasarkan Persamaan (4.39) dan Persamaan (4.29) didapatkan

$$\begin{aligned} d(\rho', \rho^*) &= d\big(F(\rho', \gamma'), F(\rho^*, \gamma^*)\big). \\ &\precsim hd(F(\rho', \gamma'), \rho^*) + kd(F(\rho^*, \gamma^*), \rho') \\ &= hd(\rho', \rho^*) + kd(\rho^*, \rho') \end{aligned}$$

Berdasarkan Definisi 2.2.3 (i) maka diperoleh $d(\rho', \rho^*) = 0$ dan $d(\rho^*, \rho') = 0$ sehingga $d(\rho', \rho^*) = 0$ dan didapatkan $\rho' = \rho^*$. Dengan cara yang serupa, diperoleh $\gamma' = \gamma^*$. Dari penjelasan di atas dapat disimpulkan bahwa pengandaian salah, yang benar adalah $(\rho', \gamma') = (\rho^*, \gamma^*)$ sehingga F memiliki titik tetap berpasangan yang tunggal. ■

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dalam penelitian ini, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. $(\mathcal{X}, d)$ adalah ruang metrik lengkap bernilai kompleks di $\mathcal{X}$. Pemetaan $F: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ untuk semua $\rho, \gamma, \mu, \upsilon \in \mathcal{X}$, dimana h dan k adalah konstanta non-negatif dengan $h + k < 1$ mempunyai titik tetap berpasangan yang tunggal di F jika memenuhi ketaksamaan berikut ini:
   a. $d\big(F(\rho, \gamma), F(\mu, \upsilon)\big) \precsim hd(\rho, \mu) + kd(\gamma, \upsilon)$
   b. $d\big(F(\rho, \gamma), F(\mu, \upsilon)\big) \precsim hd(F(\rho, \gamma), \rho) + kd(F(\mu, \upsilon), \mu)$
   c. $d\big(F(\rho, \gamma), F(\mu, \upsilon)\big) \precsim hd(F(\rho, \gamma), \mu) + kd(F(\mu, \upsilon), \rho)$, dengan $k < \frac{1}{2}$ dan $h < \frac{1}{2}$.

REFERENCES

Azzam, A., B. Fisher, & M. Khan. 2011. *Common Fixed Point Theorems in Complex Valued Metric Spaces*. Numer. Funct. Anal. Optim. 32 (3), 243-

Kreyszig, E. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications.* University of Windsor, Canada.

Sabetghadam, F., H.P. Masiha, & A.H. Sanatpour. 2009. *Some Couple Fixed Point Theorems in Cone Metric Spaces*. Hindawi Publishing Corporation. Fixed Point Theory and Applications vol.2009.

Shin, M.K., M. Kumar, P. Kumar, & S. Kumar. 2013. *Coupled Fixed Point Theorems in Complex Metric Spaces.* Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 7, 2013, no.46, 2269-2277.